Задатак 2. Кретање једне наелектрисане честице у линеарном акцелератору (10 поена)

У датом задатку посматраћемо кретање једне наелектрисане честице кроз линеарни акцелератор, у коме се наелектрисана честица убрзава из мировања само хомогеним и константним електричним пољем усмереним дуж x-осе при чему ће се занемарити губитак енергије честице услед зрачења .

Посматрајмо систем S' који се креће константном релативистичком брзином u дуж x осе система S. У тренутку $t = t' = 0$ почетка кретања тела координатни почеци система S и S' су се поклапали.
Брзина честице v'_x у референтном систему S' може се добити на више начина. Један од њих је следећи:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d\left(\dfrac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)}{d\left(\dfrac{t-\dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)} = \frac{d(x-ut)}{d(t-\dfrac{u}{c^2}x)} = \frac{dx-udt}{dt-\dfrac{u}{c^2}dx} = \frac{\dfrac{dx}{dt}-u}{1-\dfrac{u}{c^2}\dfrac{dx}{dt}} = \frac{v_x-u}{1-\dfrac{u}{c^2}v_x}.$$

2.1 (0,75 поена) Одредити убрзање честице a_x у лабораторијском систему референције S, ако је познато убрзање честице a'_x у референтном систему S'.

Ако се честица креће убрзано систем референције у коме честица мирује није инерцијални систем референције, па стога ни часовник везан за честицу не припада инерцијалном систему референције. Овај проблем се у специјалној теорији релативности решава тако што се честици у кретању у сваком тренутку придружује један инерцијални систем референције S_u (успутни систем референције) у коме ће она у тренутку t и у интервалу dt мировати. У интервалу dt кретање честице се поистовећује са кретањем њој придруженог успутног система референције чија се брзина поклапа са брзином којом се у том интервалу креће честица. Дакле ако посматрамо у лабораторијском систему референције S честица у интервалу dt има брзину $\vec{v}_x$, онда њена брзина у односу на актуелни успутни систем референције S_u, који се креће брзином $\vec{u}$ у односу на S, износи $\vec{v}_u = \vec{v}'_x = 0$ и у интервалу dt важи $\vec{v}_x = \vec{u}$. При томе је брзина $\vec{u}$ константна, док брзине $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_u$ нису константне. Уведимо појам сопственог убрзања које представља убрзање честице у односу на њен успутни систем референције. Увођење успутног (инерцијалног) система референције је од значаја у формулацији динамичког закона релативистичке механике и обезбеђује да се и убрзана кретања могу успешно разматрати и у оквиру специјалне теорије релативности. На тај начин убрзано кретање честице у коначним временским интервалима може да се посматра као низ прелазака честице из једног у други успутни инерцијални систем референције.

2.2 (0,5 поена) За честицу која се креће равномерно убрзано дуж x-осе лабораторијског система референције S, при чему је убрзање честице у сваком тренутку времена константно и износи a_0 у систему у коме честица у том тренутку мирује, одредити израз за сопствено убрзање честице a_{xs} .Резултат изразити преко величина a_0 , c и v_x .

2.3 (0,25 поена) У успутном систему референције који је за дати тренутак t и за дати интервал dt актуелан просторне координате честице су константне. За посматрача у систему S_u догађаји су раздвојени само временски. Временски интервал који мери посматрач у систему S_u је сопствено време $d\tau$ и оно се мери у систему S_u на једном часовнику везаном за честицу.

Показати да је сопствено време честице $d\tau$ користећи инваријантност просторно-временског интервала дато у облику $d\tau = \sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}dt$, где је $v(t)$ интензитет тренутне брзине кретања честице у систему S, као и брзина система S_u у односу на систем S у одговарајућем временском интервалу dt .

У случају догађаја раздвојених коначним временским интервалом, са становишта честице мери се сопствени интервал који је са одговарајућим временским интервалом мереним у инерцијалном лабораторијском систему референције дат релацијом $\tau = \tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}dt$.

Сопствени тренуци τ_1 и τ_2 мере се у успутним системима референције. Дакле сопствено време мери се на часовнику везаном за честицу у одговарајућем успутном систему референције.

2.4 (1,75 поена) Честица масе мировања m и наелектрисања q убрзава се из мировања разликом потенцијала U кроз линеарни акцелератор дужине d у коме постоји само хомогено и константно електрично поље усмерено дуж x-осе. Одредити зависност брзине честице од времена у лабораторијском систему референције користећи решење задатка ***2.2*** и математичке додатке **М.1** и **М.2** .

2.5 (1,5 поена) Одредити коначну једначину кретања честице у лабораторијском систему референције користећи решење задатка ***2.4*** и математичке додатке **М.1 и М.3**.

2.6 (0,5 поена) Одредити сопствено време кретања честице кроз акцелератор преко величина q, U, m, c, d и времена t . Користити математички додатак **М.4.**

2.7 (0,75 поена) Одредити време t_{L} за које честица пређе растојање d мерено у лабораторијском систему референције преко величина q, U, m, c, d .

2.8 (0,5 поена) Израчунати вредност времена проласка кроз акцелератор t_{L,e^+} једног позитрона. Наелектрисање позитрона је $q = |e| = +1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, маса позитрона је $m_{e^+} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, вредност убрзавајућег напона је $U = 283{,}3\,\mathrm{MV}$, док је дужина акцелератора $d = 12\,\mathrm{m}$. Брзина светлости у вакууму је $c = 2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

2.9 (0,5 поена) Одредити сопствено време t_S за које честица пређе растојање d мерено у систему референције везаном за честицу преко величина q, U, m, c, d и времена t_L.

2.10 (0,75 поена) Израчунати вредност сопственог времена t_{S,e^+} проласка једног позитрона кроз акцелератор. Наелектрисање позитрона је $q = |e| = +1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, маса позитрона је $m_{e^+} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, вредност убрзавајућег напона је $U = 283{,}3\,\mathrm{MV}$. док је дужина акцелератора $d = 12\,\mathrm{m}$. Брзина светлости у вакууму је $c = 2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

2.11 (0,75поена) За случај $\frac{qU}{mc^2} = 1$ одредити вредност односа $\frac{t_S}{t_L}$.

2.12 (0,75 поена) Одредити вредност кинетичке енергије честице T у зависности од њеног сопственог времена τ и величина m, c, d, q, U. Користити идентитет **М.5** из математичког додатка.

2.13 (0,5 поена) Одредити вредност кинетичке енергије T_{e^+} (у јединицама eV) једног позитрона на изласку из акцелератора.
($q_{e^+} = |e| = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m_{e^+} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $U = 283{,}3\,\mathrm{MV}$, $d = 12\,\mathrm{m}$, $c = 2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$)

2.14 (0,25 поена) Одредити импулс честице $\vec{p}$ у зависности од њеног сопственог времена τ и величина m, c, d, q, U.

Математички додатак.

М.1 Решавање линеарне диференцијалне једначине методом раздвајања променљивих
Диференцијална једначина $\frac{dy}{dt} = f$, при чему f не зависи од y и t, решава се на следећи начин: раздвајањем променљивих и интеграцијом $\int dy = f \int dt + C$, тако да је решење облика $y = f \cdot t + C$ где се константа C одређује из почетних услова. Ако је $t = 0$ и $y(t=0) = y_0$ тада је $y_0 = C$, тако да је коначно решење $y(t) = y_0 + f \cdot t$.

М.2 $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

М.3 $\int \frac{a \cdot x dx}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2} \cdot x^2}} = \frac{b^2}{a}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}x^2} + C,\ a \in R, b \in R, a > 0, b > 0,$

М.4 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}(x) + C = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$

$y(x)=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x=\sinh^{-1}(y)$, $2y=e^x-e^{-x}$, $2ye^x=e^{2x}-1$, $\left(e^x\right)^2-2ye^x-1=0$,

$e_{1,2}^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$, $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$, $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$ тако да је $\sinh^{-1}(y)=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$.

М.5 $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ и важи идентитет $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

Решења свих задатака треба јасно образложити са јасно дефинисаним физичким законима и величинама које користите приликом решавања задатака. Нарочито дефинисати ознаке које уводите а које нису уобичајене

Задатак припремили: Владимир Чубровић и доц. др Владимир Марковић

Рецензенти: доц. др Јасна Стевановић, доц. др Момир Арсенијевић и Жељко Цимбаљевић, ПМФ Крагујевац

Председник Комисије за такмичење ученика средњих школа: доц. др Владимир Марковић, ПМФ Крагујевац

Свим такмичарима желимо успешан рад и пуно успеха!!!

Задатак 2. Кретање једне наелектрисане честице у линеарном акцелератору (10 поена)

2.1 (0,75поена)

ПРВИ НАЧИН Убрзање честице је $a_x' = \frac{dv_x'}{dt'}$, те након сличног рачуна добијамо

$$a_x' = \frac{dv_x'}{dt'} = \frac{d\left(\dfrac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}\right)}{d\left(\dfrac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)} = \sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\frac{\dfrac{dv_x\left(1-\frac{u}{c^2}v_x\right) + (v_x - u)\frac{u}{c^2}dv_x}{\left(1-\frac{u}{c^2}v_x\right)^2}}{dt - \frac{u}{c^2}dx}$$

. Даље је

$$a_x' = \sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\frac{\frac{dv_x}{dt}\left(1-\frac{u}{c^2}v_x\right) + (v_x - u)\frac{u}{c^2}\frac{dv_x}{dt}}{\left(1-\frac{u}{c^2}v_x\right)^2\left(1-\frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}$$

, затим $\frac{dv_x}{dt} = a_x$ и $\frac{dx}{dt} = v_x$ тако да је

$$a_x' = \frac{a_x\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1-\frac{u}{c^2}v_x\right)^3}$$

. Узимајући општу особину Лоренцових трансформација да се инверзне трансформације добијају заменом места непримованих и примованих величина и заменом $-u$ са $+u$ убрзање честице у лабораторијском систему референције је $a_x = \dfrac{a_x'\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1+\frac{u}{c^2}v_x'\right)^3}$.

ДРУГИ НАЧИН

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{v_x' + u}{1 + \frac{u}{c^2}v_x'}\right)}{d\left(\dfrac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)} = \sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\frac{\dfrac{dv_x'\left(1+\frac{u}{c^2}v_x'\right) - (v_x' + u)\frac{u}{c^2}dv_x}{\left(1+\frac{u}{c^2}v_x'\right)^2}}{dt' + \frac{u}{c^2}dx'}$$

$$a_x = \sqrt{1-u^2/c^2}\cdot\frac{\frac{dv_x'}{dt'}\left(1+\frac{u}{c^2}v_x'\right) - (v_x' + u)\frac{u}{c^2}\frac{dv_x'}{dt'}}{\left(1+\frac{u}{c^2}v_x'\right)^2\left(1+\frac{u}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)}$$

, затим $\frac{dv_x'}{dt'} = a_x'$ и $\frac{dx'}{dt'} = v_x'$, тако да је

$$a_x = \frac{a'_x\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1+\frac{u}{c^2}v'_x\right)^3}.$$

2.2 (0,5 поена) У овом случају је $v'_x = 0$, $a'_x = a_0$ и $u = v_x$ тако да је сопствено убрзање честице

$$a_{xs} = a_0\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}.$$

2.3 (0,25 поена) Користећи инваријантност просторно-временског интервала $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\tau^2$ следи $d\tau = \sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}dt$.

2.4 (1,75 поена)

ПРВИ НАЧИН.

У случају кретања честице у константном електричном пољу пољу $\vec{E} = E\,\vec{e}_x$ убрзање је $a_0 = \frac{qE}{m}$ тј. $a_0 = \frac{qU}{md}$, јер је $E = \frac{U}{d}$, па је $a_x = \frac{qU}{md}\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}$, при чему је $a_x = \frac{dv_x}{dt}$.

Из претходног следи $\frac{dv_x}{dt} = \frac{qU}{md}\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}$, те након раздвајања промењљивих $\frac{dv_x}{\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{qU}{md}dt$ и интеграције, добијамо $\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{qU}{md}t + C_1$. Почетни услови су $t=0$ и $v_x = 0$ тако да је $C_1 = 0$ па је $\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{qU}{md}t$, тако да је зависност брзине од времена

$$v_x = \frac{\frac{qU}{md}t}{\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2}}.$$

ДРУГИ НАЧИН.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_x\vec{e}_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}\right)=qE\vec{e}_x$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}\right)=\frac{qU}{md}$ тако да је након раздвајања променљивих и интеграције $\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}=\frac{qU}{md}t+C_1$. Из почетних услова следи $C_1=0$, тако да је $\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}=\frac{qU}{md}t$, па је зависност брзине од времена облика $v_x=\frac{\frac{qU}{md}t}{\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2}}$.

2.5 (1,5 поена)

$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{qU}{md}t}{\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2}}$ тј. $dx=\frac{\frac{qU}{md}tdt}{\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2}}$, те након интеграције и коришћења почетних услова ($t=0$, $x=0$) добијамо да је коначна једначина кретања честице

$x(t)=\frac{mc^2d}{qU}\left[\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2c^2d^2}t^2}-1\right]$ (1).

2.6 (0,5 поена)

Сопствено време честице је $\tau(t)=\int_0^t\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}dt=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2c^2d^2}t^2}}dt$

тако да је $\tau(t)=\frac{mcd}{qU}\ln\left[\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2c^2d^2}t^2}+\frac{qU}{mcd}t\right]$.

2.7 (0,75 поена)

Ако је d дужина линеарног акцелератора, време проласка t_{L} честице кроз акцелератор у лабораторијском систему референције добијамо када у једначину (1) заменимо $t=t_{\mathrm{L}}$ и $x(t=t_{\mathrm{L}})=d$ тако да је $d=\frac{mc^2d}{qU}\left[\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2c^2d^2}t_{\mathrm{L}}^2}-1\right]$ чијим решавањем добијамо

$t_{\mathrm{L}}=\frac{mcd}{qU}\sqrt{\frac{q^2U^2}{m^2c^4}+2\frac{qU}{mc^2}}$.

2.8 (0,5 поена)
Када у решењу дела задатка ***2.7*** уврстимо дате бројне вредности добијамо $t_{\mathrm{L},e^+} \approx 40{,}1\,\mathrm{ns}$.

2.9 (0,5 поена)
Сопствено време честице за које пређе растојање d је $t_\mathrm{S} = \tau(t_\mathrm{L}) = \frac{mcd}{qU}\ln\left[\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2c^2d^2}t_\mathrm{L}^2} + \frac{qU}{mcd}t_\mathrm{L}\right]$.

2.10 (0,75 поена)
Када у решењу дела задатка ***2.9*** уврстимо дате бројне вредности добијамо $t_{\mathrm{S},e^+} \approx 0{,}51\,\mathrm{ns}$.

2.11 (0,75поена)
У случају $\frac{qU}{mc^2} = 1$ добијамо $t_\mathrm{L} = \frac{d}{c}\sqrt{3}$ и $t_\mathrm{S} = \frac{d}{c}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ тако да је $\frac{t_\mathrm{S}}{t_\mathrm{L}} = \frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} \approx 0{,}76$.

2.12 (0,75 поена)
Када у израз за кинетичку енергију честице искористимо решење задатка ***2.4*** добијамо:

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} - 1\right) = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2}{1+\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2}}} - 1\right) = mc^2\left(\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2} - 1\right).$$

Ако искористимо добијени израз из дела задатка ***1.6*** $\tau = \frac{mcd}{qU}\sinh^{-1}\left(\frac{qU}{mcd}t\right)$ тако да је $t = \frac{mcd}{qU}\cdot\sinh\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right)$ следи да је $T = mc^2\left(\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right)} - 1\right)$ и коначно $T = mc^2\left(\cosh\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right) - 1\right)$.

2.13 (0,5 поена)
Кинетичку енергију позитрона можемо одредити на више начина.
Први начин. Најлакши начин је коришћењем закона одржања енергије $m_{e^+}c^2 + |e|\cdot U = T_{e^+} + m_{e^+}c^2$ тако да је $T_{e^+} = |e|\cdot U = 283{,}3\,\mathrm{MeV}$

Претходно решење можемо да проверимо ако узмемо израз $T = mc^2\left(\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2} - 1\right)$ и ако у њега уврстимо да је $t = t_\mathrm{L} = \frac{mcd}{qU}\sqrt{\frac{q^2U^2}{m^2c^4} + 2\frac{qU}{mc^2}}$.

$T = mc^2\left(\sqrt{1+2\frac{qU}{mc^2}+\frac{q^2U^2}{m^2c^4}}-1\right) = mc^2\left(\sqrt{\left(1+\frac{qU}{mc^2}\right)^2}-1\right) = mc^2\left(1+\frac{qU}{mc^2}-1\right) = q\cdot U$ па је за позитрон $T_{e^+} = |e|\cdot U = 283{,}3\,\mathrm{MeV}$

Други начин. Ако искористимо решење задатка ***2.10*** и ***2.12*** након уврштавања бројних вредности добијамо да је вредност кинетичке енергије позитрона на изласку из акцелератора једнака $T_{e^+} \approx 283{,}3\,\mathrm{MeV}$

2.14 (0,25поена)

Импулс честице је $\vec{p} = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}\vec{e}_x$ и ако искористимо резултат дела задатка ***2.4*** и након тога дела ***2.6*** добијамо

$$\vec{p} = \frac{mv_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}}\vec{e}_x = \frac{m\frac{\frac{qU}{md}t}{\sqrt{1+\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2}}}{\sqrt{1-\frac{\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2}{1+\frac{q^2U^2}{m^2d^2c^2}t^2}}}\vec{e}_x = \frac{qU}{d}t\,\vec{e}_x = mc\cdot\sinh\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right)\vec{e}_x .$$

Користећи решења задатка ***2.14*** и ***2.12*** може се показати да важи релација $p^2c^2 = T^2 + 2mc^2T$

1. $T^2 + 2mc^2T = m^2c^4\left(\cosh\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right)-1\right)^2 + 2m^2c^4\left(\cosh\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right)-1\right) =$

$m^2c^4\cosh^2\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right) - 2m^2c^4\cosh\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right) + m^2c^4 + 2m^2c^4\cosh\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right) - 2m^2c^4$ па је

$T^2 + 2mc^2T = m^2c^4\left(\cosh^2\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right)-1\right) = m^2c^4\sinh^2\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right)$.

2. $p^2c^2 = m^2c^2\cdot\sinh^2\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right)\cdot c^2 = m^2c^4\sinh^2\left(\frac{qU}{mcd}\tau\right)$.

На основу претходног је $p^2c^2 = T^2 + 2mc^2T$.

Математички додатак.

M.1 Решавање линеарне диференцијалне једначине методом раздвајања промењљивих

Диференцијална једначина $\frac{dy}{dt} = f$, при чему f не зависи од y и t, решава се на следећи начин: раздвајањем променљивих и интеграцијом $\int dy = f\int dt + C$, тако да је решење облика $y = f \cdot t + C$ где се константа C одређује из почетних услова. Ако је $t = 0$ и $y(t=0) = y_0$ тада је $y_0 = C$, тако да је коначно решење $y(t) = y_0 + f \cdot t$.

M.2 $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$

M.3 $\int \frac{a \cdot x dx}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\cdot x^2}} = \frac{b^2}{a}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}x^2} + C,\ a \in R, b \in R, a > 0, b > 0,$

M.4 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}(x) + C = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$

$y(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x = \sinh^{-1}(y)$, $2y = e^x - e^{-x}$, $2ye^x = e^{2x} - 1$, $\left(e^x\right)^2 - 2ye^x - 1 = 0$,

$e^x_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$, $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ тако да је $\sinh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

M.5 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и важи идентитет $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$